数理解析研究所講究録
893巻 1995年 160-171

Koebe Uniformization and Circle Packings

京大理　植田達雄 (Tatsuo Ueda)

「Koebe Uniformization Conjecture (1908)

$\forall \Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ domain は、$\exists$circle domain $\subset \hat{\mathbb{C}}$ と conformal」

「Definition

$\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ circle domain が rigid

$\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\forall h : \Omega \to \Omega^*$ (circle domain) は Möbius 変換」

Circle domain の rigidity は、$\partial\Omega$ が、σ-finite linear measure をもつとき [HS2] で、Uniformization に関しては $\partial\Omega$ の境界成分が可算個のとき [HS1] で証明されている。ここではこれらの内容を紹介する。

§0. 定義など

Circle domain とは境界成分が全て円又は点である領域。

σ-finite linear measure をもつ集合とは、1次元 Hausdorff measure が有限の集合の可算和で表せる集合のこと。

以下で示す定理は次の2つ。

「Theorem 0.1. $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ は circle domain で、境界は σ-finite linear measure をもつとする。

$\exists \Omega^* \subset \hat{\mathbb{C}}$ circle domain $\exists \varphi : \Omega \to \Omega^*$ conformal

$\Rightarrow$ φ は Möbius 変換 」

「Theorem 0.2. $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ domain の境界成分は高々可算個とする。$\exists \Omega^* \subset \hat{\mathbb{C}}$ circle domain $\exists \varphi : \Omega \to \Omega^*$ conformal 」

§1. Rigidity

「Lemma 1.1. $Z \subset \mathbb{R}^2$ σ-finite linear measure をもつ Borel set

$X \subset \mathbb{R}$, $X = \{ x \in \mathbb{R} : (\{x\} \times \mathbb{R}) \cap Z$ が非可算 $\}$

$\Rightarrow$ X の Lebesgue measure は 0 」

Proof. Z の linear measure は 1 としてよい。

$X_m^n = \{ x \in \mathbb{R} : (\{x\} \times \mathbb{R}) \cap Z$ の中に互いに $\frac{1}{m}$ 以上離れた点が n ケ以上とれる。$\}$

とすると、X_m^n の measure は高々 $\frac{1}{n}$

$X \subset \bigcap_n \bigcup_m X_m^n$ より、X の measure は 0 //

「Lemma 1.2. $\Omega, \Omega^* \subset \hat{\mathbb{C}}$ circle domains, Ω の境界は σ-finite linear measure をもつ。$f : \Omega \to \Omega^*$ conformal

Σ : $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ の component で点ではない $\Rightarrow$ Σ^* も点でない。」

但し、Σ^* は f により Σ に自然に対応させられる $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega^*$ の

component。以降断りのない限り＊のついたものは同様のものとする。

Proof. Σ^* を1点とする。Möbius変換でnormalizeして

$\Sigma = \overline{U}$（単位円板），$\Sigma^* = \{0\}$ とする。

$r>0$ は十分小，D_rは中心0半径rの円。

H^*は$\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega^*$の連結成分で$D_r \setminus \{0\}$と交わるものの和。

Hは$\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$の対応する成分の和。

QはHの成分を要素とする集合。

$W = f^{-1}(D_r \setminus (\{0\} \cup H^*))$ とする。

Vは$\overline{U}$を含む任意のopen set，rを十分小さくとれば，

$W \cup H \subset V - \overline{U}$ とできる。$\infty \notin W \cup H$とする。

$\forall \theta \in [0, 2\pi]$ $X_\theta = \{\rho e^{i\theta} : \rho > 0\}$

$Q(\theta)$はHの成分のうちX_θと交わるものとすると，

Lemma 1.1 より a.e.θ で $Q(\theta)$は可算である。

$\infty \notin W \cup H$ より，$\forall X_\theta$ は$W \cup H$の内周と外周を横切る。

$\therefore f(W \cap X_\theta) \cup \left(\bigcup_{\Delta \in Q(\theta)} \Delta^* \right)$ は0と∂D_rを結ぶ。

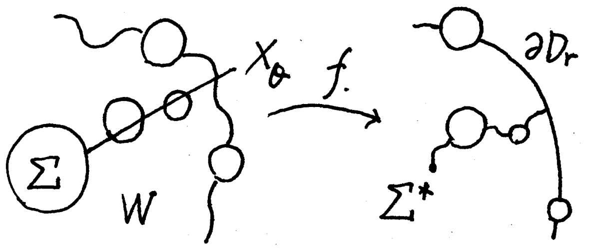

図.1.

$Q(\theta)$が可算となるθについて（a.eに存在）

$$r \leq \int_{W\cap X_\theta} |f'(z)||dz| + \sum_{\Delta\in Q(\theta)} \mathrm{rdiam}(\Delta^*\cap D_r)$$

但し、　$\mathrm{rdiam}(E) = \sup\{|z_1|-|z_2| : z_1, z_2\in E\}$

積分して、

$$2\pi r \leq \iint_W |f'(\rho e^{i\theta})|d\rho d\theta + \sum_{\Delta\in Q} \mathrm{rdiam}(\Delta^*\cap D_r)\,\mathrm{length}(\{\theta : \Delta\in Q(\theta)\})$$

$$\mathrm{length}(\{\theta\in[0,2\pi] : \Delta\in Q(\theta)\}) \leq \mathrm{diam}\,\Delta$$

$$d\rho d\theta \leq \rho d\rho d\theta = dxdy \quad \text{on } W \quad (\because \rho\geq 1).$$

$$2\pi r \leq \iint_W |f'(x+iy)|dxdy + \sum_{\Delta\in Q} \mathrm{rdiam}(\Delta^*\cap D_r)\,\mathrm{diam}\,\Delta$$

関数と数列の組 $(f, \{a_n\})$ の内積を

$$(f, \{a_n\})\cdot(g, \{b_n\}) = \int f\bar{g}\,d\mu + \sum a_n\overline{b_n}$$

で与えるようなHilbert空間を考え、Schwarz-Cauthyを使うと、

$$4\pi^2 r^2 \leq \left(\iint_W |f'(x+iy)|^2 dxdy + \sum_{\Delta\in Q}(\mathrm{rdiam}(\Delta^*\cap D_r))^2\right)$$
$$\times\left(\iint_W dxdy + \sum_{\Delta\in Q}(\mathrm{diam}\,\Delta)^2\right).$$

Dを円板とすると、

$$\frac{\pi}{4}\,\mathrm{area}\,D = (\mathrm{diam}\,D)^2,\quad \frac{\pi}{4}\,\mathrm{area}(D\cap D_r) \geq (\mathrm{rdiam}(D\cap D_r))^2$$

が成り立つので、

$$4\pi^2 r^2 \leq \left(\mathrm{area}\,f(W) + \frac{4}{\pi}\sum_{\Delta\in Q}\mathrm{area}(\Delta^*\cap D_r)\right)\left(\mathrm{area}(W) + \frac{4}{\pi}\sum_{\Delta\in Q}\mathrm{area}\,\Delta\right)$$
$$\leq \frac{16}{\pi^2}\left(\mathrm{area}\,f(W) + \sum_{\Delta\in Q}\mathrm{area}(\Delta^*\cap D_r)\right)\left(\mathrm{area}(W) + \sum_{\Delta\in Q}\mathrm{area}\,\Delta\right)$$
$$\leq \frac{16}{\pi^2}\,\mathrm{area}\,D_r\,\mathrm{area}(W\cup H) = \frac{16r^2}{\pi}\,\mathrm{area}(W\cup H)$$

$\therefore\ \mathrm{area}(W\cup H) \geq \dfrac{\pi^3}{4}$　　$\mathrm{area}(W\cup H)$はいくらでも小さく

できるはずだから矛盾。　よってΣ^*は円である。//

「Lemma 1.3. Ω, Ω^*, f は Lemma 1.2 と同じとする。

Σ : $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ の成分で1点とする $\Rightarrow$ Σ^* も1点.」

Proof. Σ^* は円とする。normalize して $\Sigma=\{0\}$, $\Sigma^*=\overline{U}$ とする。C_ρ は中心 0 半径 ρ の円周, $r>0$ 十分小とする。

$$A_r=\{z\in\mathbb{C} : \tfrac{r}{2}<|z|<r\}$$

H は $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ の連結成分で A_r と交わるものの和。

Q は H の成分を要素とする集合。

$\rho\in[\frac{r}{2}, r]$ に対し, $Q(\rho)=\{\Delta\in Q : \Delta\cap C_\rho\neq\phi\}$ とすると, Lemma 1.1. より, a.e. ρ で $Q(\rho)$ は可算である。

そのような ρ に対し, C_ρ の像は $\Sigma^*=\overline{U}$ の外側を回っているので,

$$2\pi \le \int_{C_\rho\setminus H}|f'(z)||dz| + \sum_{\Delta\in Q(\rho)} \mathrm{diam}(\Delta^*)$$

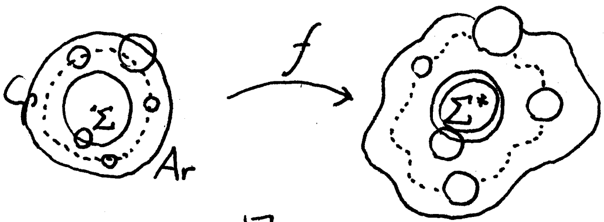

図2.

$\int_{\frac{r}{2}}^{r} d\rho$ を上式両辺について計算すると, Lemma 1.2. と同様に,

$$\pi^2 r^2 \le \frac{12r^2}{\pi}\,\mathrm{area}(f(A_r\setminus H)\cup H^*)$$

$$\therefore \mathrm{area}(f(A_r\setminus H)\cup H^*)\ge\frac{\pi^3}{12}$$

$\infty\notin H^*\cup f(A_r\setminus H)$ としておけば, $\mathrm{area}(f(A_r\setminus H)\cup H^*)$ はいくらでも小さくなるはずだから矛盾。よって Σ^* は点である。//

「Lemma 1.4. Ω, Ω^*, f は Lemma 1.2. と同じとする。

$f: \Omega \to \Omega^*$ conformal は $\overline{\Omega} \to \overline{\Omega^*}$ に homeomorphism にのばせる。」

Proof. Σ: $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ の成分 が、点なら Σ^* も点であり、当然のびる。

Σ を円板とする（Σ^* も円板になる。） $p \in \partial\Sigma$ をとる。

normalize して $p=0$, $\Sigma^* = \overline{U}$ とする。

$C_p, A_r, Q, Q(p), H, H^*$ は Lemma 1.3 と同じとする。

$\operatorname{diam}\{(H^* \setminus \overline{U}) \cup f(A_r \setminus H)\} \to 0 \ (r \to 0)$ ならば、f は $\Omega \cup \{p\}$ に連続にのびる。

$\not\to 0$ とすると、$^\exists M$. $\operatorname{diam}\{(H^* \setminus \overline{U}) \cup f(A_r \setminus H)\} \geq M$.

$$\therefore M \leq \int_{C_p \setminus H} |f'(z)||dz| + \sum \operatorname{diam}(\Delta^*)$$

以下同様にして、

$$\operatorname{area}(f(A_r \setminus H) \cup (H^* \setminus \Sigma^*)) \geq \frac{M^2 \pi}{12 r^2} \geq \frac{M^2 \pi}{12} \quad (r: 十分小 < 1)$$

やはり、$\operatorname{area}(f(A_r \setminus H) \cup (H^* \setminus \Sigma^*))$ をいくらでも小さくできることに矛盾。$\therefore f$ は $\partial\Omega$ の各点で連続にのびる。それを $\hat{f}$ とする。 $\hat{f}$: bijection を示せばよいが、各 Σ（円周）$\subset \partial\Omega$ で、$\hat{f}$ が injection になればよい。 injection でないとする。

$$^\exists p_1, p_2 \in \Sigma \quad p_1 \neq p_2 \quad \hat{f}(p_1) = \hat{f}(p_2) = q$$

normalize して、$q=0$. $\Sigma = \partial U$, $\Omega \cap U = \phi$ とする。

$f: \Omega \to \Omega^*$ は homeomorphism だから、p_1, p_2 を端点とする ∂U の

弧は$\hat{f}$で$\{0\}$にうつる。この弧を$\{e^{i\theta}: \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$とする。

$r>0$十分小、D_r：中心0半径rの円板。

H^*は$\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega^*$の連結成分で$D_r$と交わるものの和、

H, Qは今までと同様。$X_\theta = \{\rho e^{i\theta} : \rho > 1\}$　$\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$Q(\theta)$はHの成分のうち、X_θと交わるものとする。

$\infty \notin H \cup f^{-1}(D_r \setminus H^*)$として、　$W = f^{-1}(D_r \setminus (H^* \cup \Sigma^*))$.

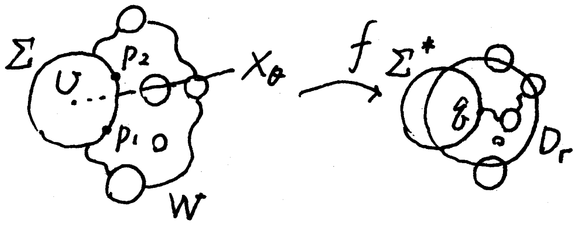

図3.

$$r \le \int_{X_\theta \setminus H} |f'(z)||dz| + \sum_{\Delta \in Q(\theta)} r\,\mathrm{diam}(\Delta^* \cap D_r)$$

以下同様で、$\mathrm{area}(W \cup H) \ge \dfrac{\pi(\theta_2 - \theta_1)^2}{16}$

やはりいくらでも小さくできることに矛盾//

あとは$\hat{f}$を境界での反転により$\hat{\mathbb{C}}$へK-quasiconformalにのばし、dilatationが0になることを示せば、fがMöbius変換のΩへの制限であることがわかり、Theorem 0.1が示せる。詳細は省略。[HS2]

§2. Circle domain への写像の存在

以下Ωの境界成分は可算個とする。Ωはcircle domainと

は限らず、一般の領域とする。Ωから$\exists$circle domain Ω^*へのconformal mapの存在は超限帰納法を用いる。

集合Xに対し、その孤立点を除いたものをX'と表す。順序数αに対し、X^αを次のように定義する。

$$X^0 = X \quad \begin{cases} \alpha\text{が successor ordinal の時.} & X^\alpha = (X^\beta)' \ (\alpha = \beta + 1) \\ \alpha\text{が limit ordinal の時.} & X^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} X^\beta \end{cases}$$

Ωの境界成分の集合$B(\Omega)$に自然な位相を入れ、$B(\Omega)^\alpha$を考える。countable compact Hausdorff spaceには必ず孤立点があるので、$B(\Omega)^\alpha \neq \phi$なら、$(B(\Omega)^\alpha)'$の点は$B(\Omega)^\alpha$より確実に少ない。$\exists\beta$ s.t. $B(\Omega)^\beta = \phi$。γをこのような順序数の中で最小のものとする。$B(\Omega)^\alpha$のcompact性からγはsuccessor ordinal。よってその前者をαとし、$B(\Omega)$の(Ωの)rankという。$B(\Omega)^\alpha$は有限個の点から成り、その数をnとして、(α, n)をΩのtypeという。各ordinal βに対し、$B(\Omega)^\beta$の孤立点をrank βの境界成分という。

$B(\Omega)$が有限のときは、circle domainへのconformal mapの存在はKoebe自身が証明している。[Ko] このことを帰納法のbaseとする。以下$B(\Omega)$は無限集合とする。

type (α, n)の順序は、

$$(\lambda_1, n_1) < (\lambda_2, n_2) \Leftarrow \lambda_1 < \lambda_2, \text{又は} (\lambda_1 = \lambda_2 \text{かつ} n_1 < n_2)$$

としておく。

Ωのrankがαなら、rank αの境界成分K_0のまわりをJordan曲線で切ることによりΩのtypeを下げられる。Jordan曲線をJ_kとし、K_0とJ_kの間をΩから取り去った領域をΩ_kとして、$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \cdots$ $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ となる列を考える。Ω_k のtypeはΩのtypeより下だから、帰納法の仮定より、$^{\exists}\Omega_k^*$: circle domain $^{\exists} f_k : \Omega_k \to \Omega_k^*$ conformal.

normalizeして、$^{\forall}k$、$f_k(\partial\Omega) = \partial U$, $f_k(z_0) = 0$, $z_0 \in \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$ とする。$\{f_k\}$は正規族になるので部分列をとって

$$f_k \underset{cpt}{\rightrightarrows} {}^{\exists} f \text{ on } \Omega \qquad f\text{はconformal or constant}$$

fがconstantになるなら、$f \equiv 0$ だが、

$g_k(z) = f_k(z)/f_k'(z_0)$ ととり直すことによって、

$\{g_k\}$ も正規族になり、部分列をとって

$$g_k \underset{cpt}{\rightrightarrows} {}^{\exists} g \text{ on } \Omega \qquad g'(z_0) = 1 \text{ より } g \text{ はconformal}$$

このgをfと思う。

$f : \Omega \to \Omega^*$ で、Ω^* がcircle domainになるならTheorem 0.2が言える。詳細は省略。[HS1]

§3. Circle packing との関連

$P = \{P_i : i \in V\}$ 各P_iはcompact topological diskで、内点は互いにdisjointとする。更にPの任意の2つのdisksは高々1点で交わり、3つのdisksは共通部分をもたないとする。

packing P の limit point とは、$p\in\hat{\mathbb{C}}$、p のどんな近傍も無限个の P_i と交わるような p とする。

P が Ω の acceptable packing であるとは、上のような P で、Ω 内に limit point がないときにいう。

P が Ω の acceptable packing の時、$\Omega_P=\Omega\setminus\bigcup_{i\in V}\{\mathrm{int}\,P_i\}$ を generalized domain という。但し、generalized domain は open とは限らないので domain ではないが、connected である。

Ω,Ω^* を generalized domain とした時、$h:\Omega\to\Omega^*$ が conformal とは、$\mathrm{int}\,\Omega$ で conformal, Ω で homeomorphism のときをいう。

Ω が circle domain で、P が circle packing で acceptable の時、generalized domain Ω_P を generalized circle domain という。

domain を generalized domain, circle domain を generalized circle domain に読みかえて、Theorem 0.1, Theorem 0.2 と同様のことが成り立つ。

それにより、例えば次の定理が得られる。

「Theorem 3.1. T を $\hat{\mathbb{C}}$ の境界成分が高々可算個の領域の三角形分割とする。このとき $\exists$ circle packing P in $\hat{\mathbb{C}}$ s.t. graph は T の 1-skeleton と組合せ同値で、carrier は circle domain 更に P は Möbius 変換を除き一意。」

Proof. まず、Tをgraphにもつacceptable packingをつくる。(circle packingでなくてよい。) packed setsはtopological diskでよいのでこれは可能である。acceptableというのはTが分割している領域に対してであり、それがcarrierになる。packingをP^*, carrierをΩ^*とし、generalized domain $\Omega^*_{P^*}$に対し、Theorem 0.2.の読みかえ版により、$\exists h$, $\exists \Omega$: generalized circle domain s.t. $h: \Omega^*_{P^*} \to \Omega$ conformal。P^*に対応するΩのpacking Pはcircle packingであり、carrierはΩ。また、PのgraphはTと組合せ同値になる。

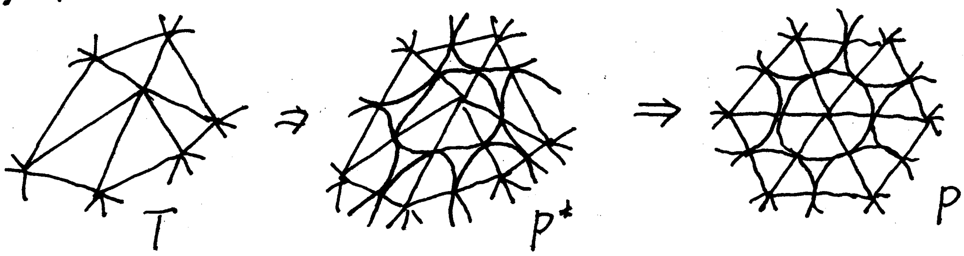

図4.

Tに対応するpacking(circle)が2つあったとする。(P_1, P_2) P_1, P_2の"すき間"は全て(曲がった)三角形だが、P_1からP_2の組合せ的に対応する三角形の間には頂点の行先(3点)を決めてもRiemannの写像定理によりconformal mapが存在。それらをつなぐと、generalized circle domainからgeneralized circle domainへのconformal mapができるが、Theorem 0.1の読みかえ版により、これはMöbius変換である。 //

§4. References

[HS.1] Z.-X. He & O. Schramm: Fixed points, Koebe uniformization and circle packings. Ann. Math. 137. pp 369-406 (1993)

[HS2] Z.-X. He & O. Schramm: Rigidity of circle domains whose boundary has σ-finite linear measure. Invent. Math. 115 p.p. 297-310 (1994)

[Ko] P. Koebe: Abhandlungen zur Theorie der Konformen Abbildung. VI. Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche auf Kreisbereiche, etc. Math. Z. 7. p.p. 235~301 (1920)